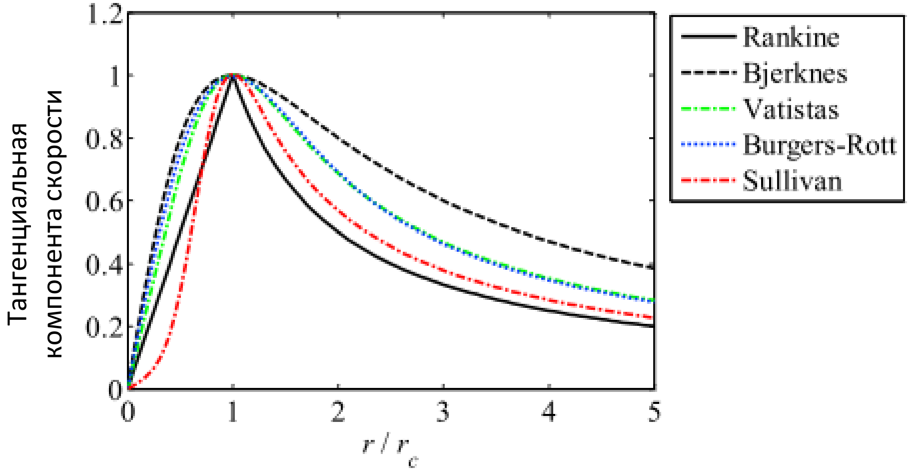
1 2 3

Аналитическое описание траекторий в поле течения с однородной завихренностью и бесконечного набегающего потока

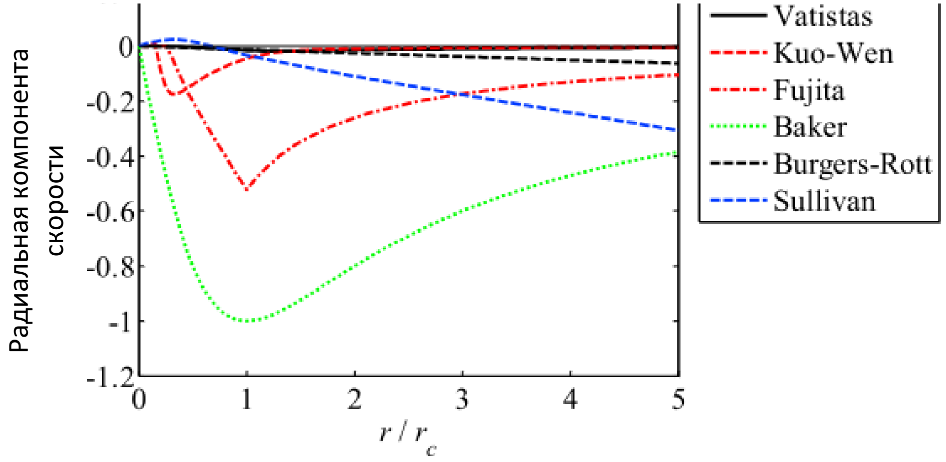


Ольга Шомина [1,2], Тарасова Татьяна [3]

Исследуется поведение траекторий в поле стационарного течения, представляющего собой суперпозицию бесконечного набегающего потока и фиксированного в пространстве вихревого движения с постоянной завихренностью $\left(V_\theta(r) \sim r\right)$

Предположим также в первом приближении $V_r(r) \sim r$ (распределенный сток)

Приложение: интерпретация дистанционных наблюдения вихревых течений в океане



Модели для описания вихревых движений [Kim , Matsui 2017]

Линейный профиль скорости

W, ψ задают величину и направление бесконечного набегающего потока

$V_\theta(r), V_r(r)$ описывают тангенциальную и радиальную компоненты скорости вихревого движения

Уравнение для линий тока в СК, связанной с центром вихревого движения:

$$\begin{cases} \dot{r} = V_r + W\cos(\Psi - \theta) \\ r\dot{\theta} = V_\theta + W\sin(\Psi - \theta) \end{cases}$$

[Shomina et al. RS 2022]

$$\begin{cases} \dot{r} = \boxed{-ar} + W\cos(\Psi - \theta) \\ r\dot{\theta} = \boxed{br} + W\sin(\Psi - \theta) \end{cases}$$

Исключаем из системы sin и cos.

$$\begin{cases} \dfrac{\dot{r}}{r} = \dfrac{\ddot{\theta} + a\dot{\theta}}{-2\dot{\theta} + b} \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\dot{r}}{r}\right) + \dfrac{\dot{r}}{r}\left(\dfrac{\dot{r}}{r} + a\right) = \dot{\theta}(\dot{\theta} - b) \end{cases}$$

Замена: $\dfrac{\dot{r}}{r} = x, \quad \dot{\theta} = y$

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - x^2 - (ax + by) \\ \dot{y} = -2xy - (ay - bx) \end{cases}$$

Замена (комплексная): $w = y - ix$

$$y^2 - x^2 = \operatorname{Re} w^2$$

$$-2xy = \operatorname{Im} w^2$$

Можно показать, что выполняется следующее:

$$(y - ix)(b + ia) = i(ay - bx) + (ax + yb)$$

Поиск решения системы

Систему можно представить в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{Re} w^2 + \operatorname{Re}(-w)(b+ia) \\ \dot{y} = \operatorname{Im} w^2 + \operatorname{Im}(-w)(b+ia) \end{cases}$$

Хотим определить w(t)

$$i\dot{w} = i\dot{y} + \dot{x} = w^2 - w(b+ia)$$

$$i\,\frac{dw}{w} = (w-(b+ia))dt =$$

$$= (y - ix - (b+ia))dt = (\dot{\theta} - i\,\frac{\dot{r}}{r} - (b+ia))dt$$

$$i\ln w = i(\ln|w| + iArgw) = \theta - i\ln r - (b+ia)t$$

$$\begin{cases} -Argw = \theta - bt + C \\ \ln|w| = -\ln r - at + \ln K \end{cases}$$

Вспомним, что w можно представить в виде

$$w = |w|\cos Argw + i|w|\sin Argw = \dot{\theta} - i\,\frac{\dot{r}}{r}$$

Тогда

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \dfrac{1}{r} K e^{-at}\cos(bt - C - \theta) \\ -\dfrac{\dot{r}}{r} = \dfrac{1}{r} K e^{-at}\sin(bt - C - \theta) \end{cases}$$

Решение исходной системы

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \dfrac{1}{r} K e^{-at} \cos(bt - C - \theta) \\ -\dfrac{\dot{r}}{r} = \dfrac{1}{r} K e^{-at} \sin(bt - C - \theta) \end{cases}$$

Поставляя последнюю систему в исходную, получаем

$$\begin{cases} -Ke^{-at} \sin(bt - C - \theta) + ar = W \cos(\psi - \theta) \\ Ke^{-at} \cos(bt - C - \theta) - br = W \sin(\psi - \theta) \end{cases}$$

Исключаем члены ar и –br, вводим угол γ такой, что

$$\sin \gamma = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \cos \gamma = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$tg\,\theta = \frac{W \cos(\gamma - \psi) - Ke^{-at} \sin(\gamma - bt + C)}{W \sin(\gamma - \psi) + Ke^{-at} \cos(\gamma - bt + C)}$$

$$r = \frac{\sqrt{W^2 + K^2 e^{-2at} + 2WKe^{-at} \sin(bt - C - \psi)}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Решение исходной системы для линейных профилей

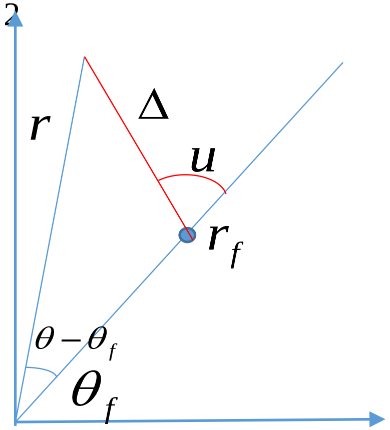
Исследование асимптотики при $t \to \infty$

$$\begin{cases} tg\,\theta_f = \dfrac{b + a\,tg\,\psi}{b - a\,tg\,\psi} \\ r_f = \dfrac{W}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

Описание поведения траектории относительно точки устойчивости

$$r = \frac{\sqrt{W^2 + K^2 e^{-2at} + 2WKe^{-at}\sin(bt - C - \psi)}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$r_f = \frac{W}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



Попробуем описать функцию $\Delta(u)$ в системе отсчета, связанной с точкой устойчивости

Можно показать, что

$$\Delta(t) = \sqrt{r^2 + r_f^2 - 2rr_f\cos(\theta - \theta_f)} = \frac{Ke^{-at}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\begin{cases} \sin u = \dfrac{r\sin(\theta - \theta_f)}{\Delta} \\ r\cos(\theta - \theta_f) = r_f + \Delta\cos u \end{cases}$$

Исключаем из системы $\sin(\theta - \theta_f)$ и $\cos(\theta - \theta_f)$

Тогда можно показать, что

$$\cos u = \sin(bt - C - \psi)$$

$$\Delta(u) = \frac{K}{\sqrt{a^2 + b^2}} e^{-\frac{a}{b}\left(u + C + \psi + \frac{\pi}{2} + 2\pi m\right)}$$

Вывод: траектория со временем приближается к точке устойчивости по экспоненциальному закону, показатель определяется отношением радиальной компоненты скорости к тангенциальной. Характер не зависит от величины и направления набегающего потока

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 19-72-30028 (https://rscf.ru/project/19-72-30028/).